Óptica geométrica (2da Parte)

15.(a) Realice un bosquejo de las diferentes lentes delgadas posibles que se pueden obtener al combinar dos superficies con radios de curvatura de 10 *cm* y 20 *cm*. ¿Cuáles son convergentes y cuáles divergentes? (b) Encuentre la distancia focal en cada caso. Suponga que $n = 1,5$. (c) repita los cálculos si las lentes están sumergidas en un medio de índice $n = 1,6$

Las lentes que vamos a estudiar en la guía son un pedazo de vidrio, de espesor delgado, que se encuentran en un medio por donde se propaga la luz (se supone el mismo de ambos lados). Las caras de las lentes pueden ser ambas esféricas o una plana. Para ellas, vamos a definir también dos puntos notables:

- el foco objeto (f_o) es el punto sobre el eje principal que satisface que todo rayo que pasa en la dirección de este punto, se refracta emergiendo del otro lado de la lente en forma paralela al eje.

- el foco imagen (f_i) es el punto sobre el eje principal que satisface que todo rayo que incide sobre la lente en forma paralela al eje, emerge del otro lado de la misma pasando en la dirección del foco imagen.

Estos dos puntos en la lentes delgadas están ubicados en forma simétrica a la lente (es decir a la misma distancia y uno a cada lado)

La fórmula de Descartes de las lentes delgadas es:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x'} = \frac{1}{f_o} \qquad ; \qquad A = \frac{y'}{y} = \frac{x'}{x}$$

Donde la convención de signos es la misma que usamos es la misma que para los espejos y dioptras (la luz incide desde la izquierda, todo lo que está ubicado de ese lado es positivo).

Para estas lentes el foco objeto puede pensarse como la posición del objeto cuya imagen se forma en infinito ($x' = \infty$), mientras que el foco imagen es la posición imagen donde se forma la imagen de un objeto que se encuentra en infinito ($x = \infty$)

Por último, el valor del foco se relaciona con el índice del vidrio usado para la lente n_v, con el índice del medio que rodea la lente n_o, y con los radios de las dos caras del vidrio, mediante la siguiente expresión (llamada fórmula del constructor de lentes)

$$f_o = \frac{n_o}{n_v - n_o} \cdot \left(\frac{R_1 . R_2}{R_1 - R_2} \right)$$

Para darle signo a estos radios debemos observar si el centro de curvatura de cada cara que da hacia la izquierda (de donde proviene la luz, es decir en el sentido positivo), o en sentido contrario (es decir hacia la derecha, el negativo). Aquellas lentes para las cuales f_o resulta positivo (es decir se ubica del lado izquierdo, de donde proviene la luz) se llaman convergentes.

Recordemos entonces que nuestra convención de signos dice que:

- un objeto es real si x es positiva

- una ***imagen es real*** si se forma por intersección directa de los rayos emergentes. Para eso tenemos que ***debe ser negativa*** (igual que en las dioptras esféricas)

Para el trazado de rayos, los tres rayos principales que permiten obtener gráficamente la ubicación y características de la imagen son:

① todo rayo paralelo al eje, atraviesa la lente emergiendo en la dirección de la recta al foco imagen.

$$\frac{1}{x'} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f'}$$

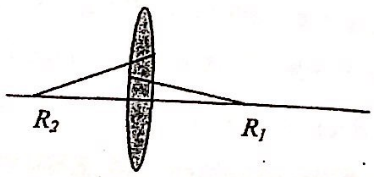
$$\frac{n}{x'} - \frac{n'}{x} = \frac{n - n'}{R}$$

② todo rayo que incide en la dirección del foco objeto atraviesa la lente emergiendo en la dirección paralela al eje.

③ todo rayo que incide en la dirección del vértice O, se refracta sin desviarse.

Analicemos la situación que plantea el enunciado; tenemos la lente sumergidas en el medio aire ($n_o = 1$) y dos caras esféricas, que según su orientación se las llama:

- biconvexa: de ambos lados tiene la forma de abajo de una cuchara. En este caso el radio R_2 es positivo, y el R_1 es negativo (a la izquierda y derecha de O, respectivamente).



Tenemos:

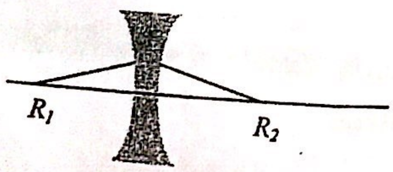
R1

$$f_o = \frac{n_o}{n_v - n_o} \cdot \left(\frac{R_1 . R_2}{R_1 - R_2} \right) \xrightarrow{reemplazo}$$

$$= \frac{1}{0,5} \cdot \left(\frac{-200\ cm^2}{(-10cm) - (20cm)} \right) = 13,\widehat{3}\ cm$$

Como el signo es positivo, se trata de una lente ***convergente***

- bicóncava: de ambos lados tiene la forma de adentro de una cuchara. En este caso el radio R_1 es positivo, y el R_2 es negativo (a la izquierda y derecha de O, respectivamente).



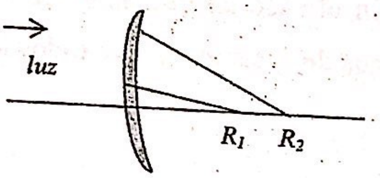
Tenemos:

$$f_o = \frac{n_o}{n_v - n_o} \cdot \left(\frac{R_1 . R_2}{R_1 - R_2} \right) \xrightarrow{reemplazo}$$

$$= \frac{1}{0{,}5} \cdot \left(\frac{-200\ cm^2}{(10cm) - (-20cm)} \right) = -13{,}\widehat{3}\ cm$$

Como el signo es negativo, se trata de una lente ***divergente***

- meniscos: de ambos lados los radios tienen el mismo signo: R_2 y R_1 negativos (a la derecha de O, como en el dibujo) o R_2 y R_1 positivos (como el caso de abajo)



Tenemos:

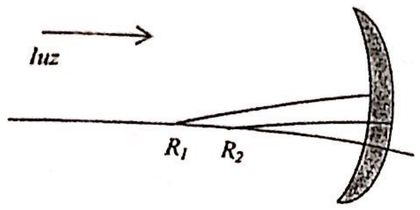
$$f_o = \frac{n_o}{n_v - n_o} \cdot \left(\frac{R_1 . R_2}{R_1 - R_2} \right) \xrightarrow{reemplazo}$$

$$= \frac{1}{0{,}5} \cdot \left(\frac{200\ cm^2}{(-10cm) - (-20cm)} \right) = 40\ cm$$

Como el signo es positivo, es una lente ***convergente*** (se la llama menisco convergente)

En cambio, si el caso es:

$$f_o = \frac{n_o}{n_v - n_o} \left(\frac{R_1 . R_2}{R_1 - R_2} \right) =$$



$$\frac{1}{0,5} \left(\frac{200\ cm^2}{(10cm) - (20cm)} \right) = -40\ cm$$

Como el signo es negativo, es una lente ***divergente*** (se la llama menisco divergente)

Observación: como se observa en el dibujo, ambos meniscos son la misma lente, cambia de que lado se efectúa la incidencia de la luz.

El carácter convergente o divergente de una lente depende del medio en que se encuentre sumergida. En el caso en que $n_o = 1,6$, el medio tiene mayor índice que el vidrio de la lente, los signos de f_o cambian para todos los casos. En efecto

Biconvexa:

$$f_o = \frac{n_o}{n_v - n_o} \left(\frac{R_1 . R_2}{R_1 - R_2} \right) = \frac{1,6}{-0,1} \left(\frac{-200\ cm^2}{(-10cm) - (20cm)} \right) = -106,\hat{6}\ cm$$

Es divergente

Bicóncava:

$$f_o = \frac{n_o}{n_v - n_o} \left(\frac{R_1 . R_2}{R_1 - R_2} \right) = \frac{1,6}{-0,1} \left(\frac{-200\ cm^2}{(10cm) - (-20cm)} \right) = 106,\hat{6}\ cm$$

Es convergente.

Y con los meniscos la distancia focal cambia a $f = 320\ cm$, pero ahora es divergente si incido sobre la cara convexa, y convergente si lo hago sobre la cóncava.

16. Una lente biconvexa tiene un índice de refracción de 1,5 y sus radios son de 0,20 m y 0,30m (a) Calcule la distancia focal. (b) Determine la posición de la imagen y el aumento de un objeto que está a una distancia de (i) 0,80 m ; (ii) 0,48 m ; (iii) 0,40 m ; (iv) 0,24 m y (v) 0,20 m de la lente. (c) Considere el caso de un objeto virtual que está a 0,20 m detrás de la lente. Realice las distintas marchas de rayos.

Primero calculemos la distancia focal, con la fórmula del constructor de lentes, y usando los signos para los radios $R_1 > 0$ y $R_2 < 0$ (primer caso del problema anterior)

$$f_o = \frac{n_o}{n_v - n_o} \cdot \left(\frac{R_1 . R_2}{R_1 - R_2}\right) = \frac{1}{0,5} \cdot \left(\frac{-0,06\ m^2}{(-0,2m) - (0,3m)}\right) = 0,24\ m$$

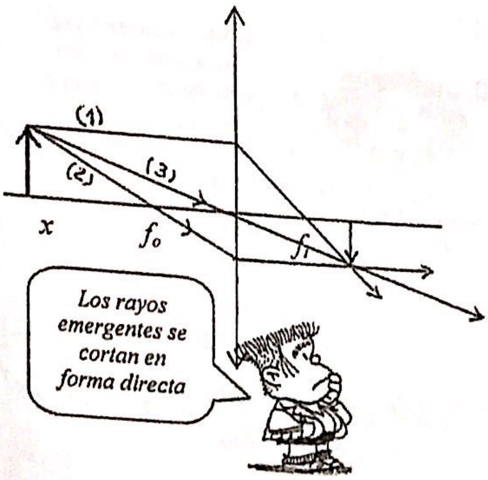
Como vemos es convergente (f_o positivo)

Planteamos cada caso:

i) $x = +\,0,8\ m$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x'} = \frac{1}{f_o} \rightarrow \frac{1}{x'} = \frac{1}{x} - \frac{1}{f_o} = \frac{f_o - x}{x . f_o} \rightarrow$$

$$x' = \frac{x . f_o}{f_o - x} = \frac{0,8m . 0,24m}{0,24m - 0,8m} = -0,343\,m$$

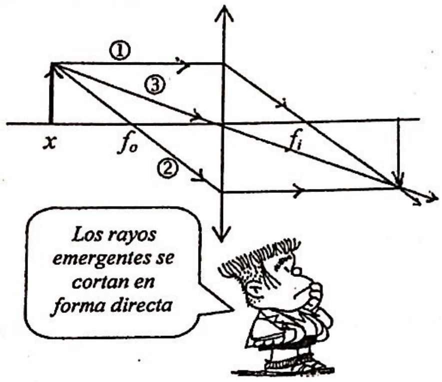


$$A = \frac{y'}{y} = \frac{x'}{x} = \frac{-0,343m}{0,8m} = -0,43$$

Entonces, como x' dio negativa, significa que la imagen es ***real*** (ver página 4), como el aumento A es negativo la imagen es ***invertida***, y como $|A| < 1$ la imagen es de ***menor*** tamaño. Para el trazado de rayos, te marco en el dibujo los tres rayos principales.
Observar que como el foco objeto nos dio positivo se lo dibuja del lado que incide la luz (es decir el izquierdo) y el foco imagen es simétrico pero del otro lado.

ii) $x = +\,0{,}48\ m$

$$x' = \frac{x.f_o}{f_o - x} = \frac{0{,}48m.0{,}24m}{0{,}24m - 0{,}48m} = -0{,}48m$$

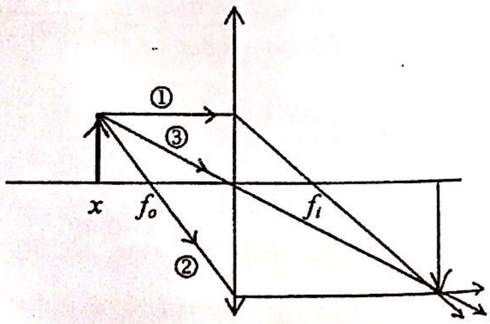


$$A = \frac{y'}{y} = \frac{x'}{x} = \frac{-\,0{,}48m}{0{,}48m} = -1$$

Como x' dio negativa, significa que la imagen es ***real***, y como el aumento A es negativo la imagen es ***invertida***, y como $|A| = 1$ la imagen es de ***igual*** tamaño. Para el trazado de rayos, te marco en el dibujo los tres rayos principales.

iii) $x = +\,0{,}4\ m$

$$x' = \frac{x.f_o}{f_o - x} = \frac{0{,}4m.0{,}24m}{0{,}24m - 0{,}4m} = -0{,}6m$$

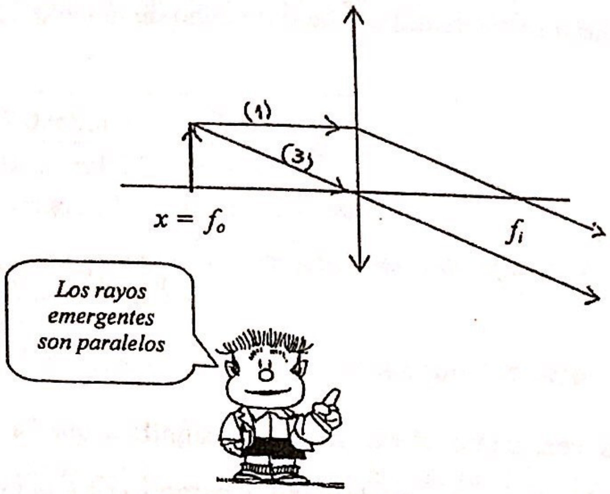


$$A = \frac{y'}{y} = \frac{x'}{x} = \frac{-\,0{,}6m}{0{,}4m} = -1{,}5$$

Como x' dio negativa, significa que la imagen es *real*, como el aumento A es negativo la imagen es *invertida*, y como $|A|>1$ la imagen es de *mayor* tamaño. Para el trazado de rayos, te marco en el dibujo los tres rayos principales.

iv) $x = +\,0{,}24\ m$

$$x' = \frac{x.f_o}{f_o - x} = \frac{0{,}24m.0{,}24m}{0{,}24m - 0{,}24m} = \infty$$

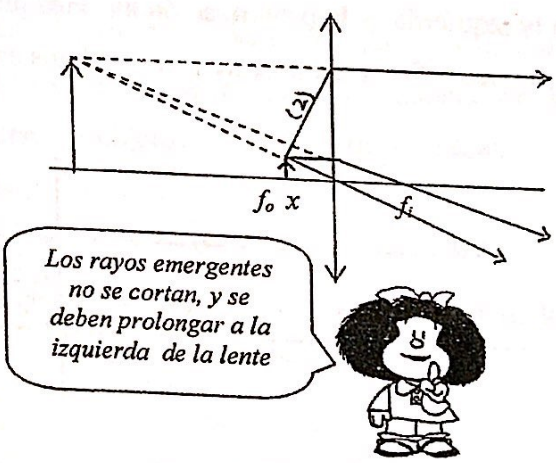


En este caso se dice que la imagen está en infinito. No se puede trazar el rayo ②, pero los otros emergen paralelos y por lo tanto no se cortan nunca (ni aun prolongando)

v) $x = +\,0{,}2\ m$

$$x' = \frac{x.f_o}{f_o - x} = \frac{0{,}2m.0{,}24m}{0{,}24m - 0{,}2m} = 1{,}2\,m$$

$$A = \frac{y'}{y} = \frac{x'}{x} = \frac{1{,}2m}{0{,}2m} = 6$$



Esta vez, como x' dio positiva, significa que la imagen es *virtual*, como el aumento A es positivo la imagen es ***derecha***, y como $|A|>1$ la imagen es de *mayor* tamaño. El trazado de rayos confirma el resultado de las ecuaciones

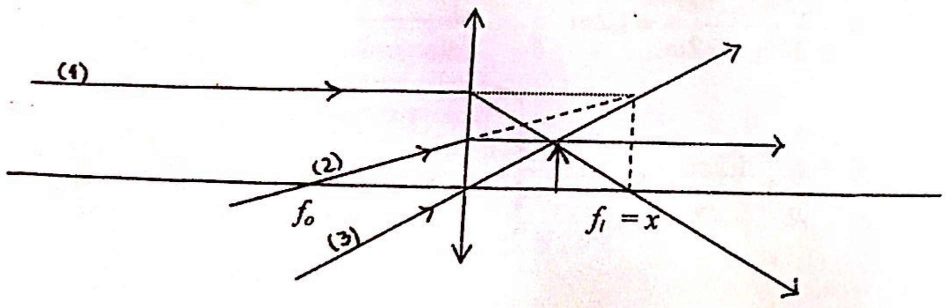
c) por nuestra convención de signos, un objeto virtual es aquel para el cual la posición objeto x es negativa. Esto significa que si bien la luz sigue incidiendo desde la izquierda, el objeto se encuentra del lado derecho de la lente. La ecuación nos da:

$$x' = \frac{x.f_o}{f_o - x} = \frac{-0{,}2m.0{,}24m}{0{,}24m - (-0{,}2m)} \cong -0{,}109 \;\; m$$

$$A = \frac{y'}{y} = \frac{x'}{x} = \frac{-0{,}109m}{-0{,}2m} \cong 0{,}55$$

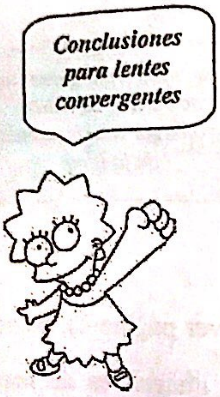
Esta vez, como x' dio negativa, significa que la imagen es ***real***, como el aumento A es positivo la imagen es ***derecha***, y como $|A| < 1$ la imagen es de ***menor*** tamaño.

Para el trazado de rayos, tener en cuenta que el objeto (la flecha punteada a la derecha de la lente) sigue ***iluminando desde el lado izquierdo***. Los tres rayos principales vienen entonces desde la izquierda, y la prolongación en línea punteada pasa por la punta del objeto. Te los numero y los refracto en la lente como dijimos en la introducción:



¿Qué es un objeto virtual?

La respuesta es que debe ser una imagen de un sistema óptico previo (por ejemplo una lente ubicada a la izquierda) que ilumina desde aquel lado, pero forma este objeto a la derecha.



- Para objetos reales, la imagen puede ser:

✓ real, invertida y menor si el objeto está más lejos que dos veces el foco ($x > 2.f$).

✓ real, invertida y mayor, si el objeto está entre dos veces el foco y el foco ($f < x < 2.f$)

✓ virtual, derecha y mayor, si el objeto está entre el foco y la lente ($x < f$)

- Para objetos virtuales, la imagen siempre es real y derecha.

17. Una lente bicóncava tiene un índice de refracción de 1,5 y radios de 0,20 m y 0,30 m. (a) Halle la distancia focal. (b) Determine la posición de la imagen y el aumento de un objeto que está a 0,2 m de la lente. (c) Considere un objeto virtual que está a (i) 0,40 m y (ii) 0,20 m. Realice las distintas marchas de rayos.

Primero calculemos la distancia focal, con la fórmula del constructor de lentes, y usando los signos para los radios $R_1 < 0$ y $R_2 > 0$

$$f_o = \frac{n_o}{n_v - n_o}.\left(\frac{R_1.R_2}{R_1 - R_2}\right) \xrightarrow{reemplazo} = \frac{1}{0,5}.\left(\frac{-0,06\ m^2}{(0,2m)-(-0,3m)}\right) = -0,24\ m$$

Como vemos es divergente (f_o negativo)

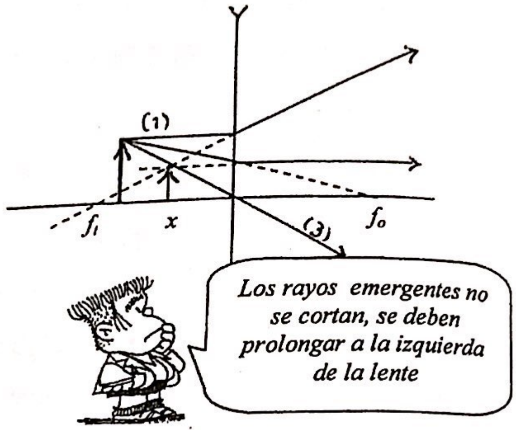
Planteamos cada caso:

i) $x = +\,0{,}2\ m$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x'}=\frac{1}{f_o} \rightarrow \frac{1}{x'}=\frac{1}{x}-\frac{1}{f_o}=\frac{f_o-x}{x.f_o} \rightarrow$$

$$x'=\frac{x.f_o}{f_o-x}=\frac{0{,}2m.(-0{,}24m)}{(-0{,}24m)-0{,}2m}=0{,}109\,m$$

$$A=\frac{y'}{y}=\frac{x'}{x}=\frac{-0{,}109m}{0{,}2m}\cong 0{,}55$$



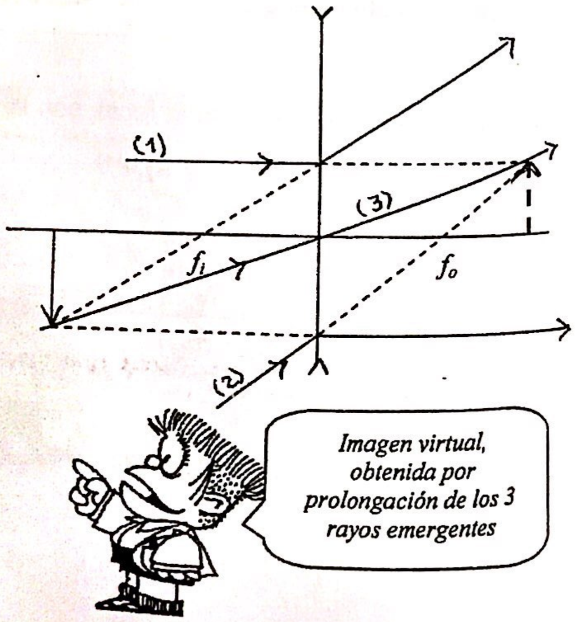
Entonces, como x' dio positiva, significa que la imagen es ***virtual*** (ver página 4), como el aumento A es positivo la imagen es ***derecha***, y como $|A|<1$ la imagen es de ***menor*** tamaño. Para el trazado de rayos, te marco en el dibujo los tres rayos principales, numerados como dijimos en la página 4. Observar que como el foco objeto es negativo se lo dibuja del lado derecho (y el foco imagen es simétrico y está del lado izquierdo).

c) Para los casos de objetos virtuales, en nuestra convención de signos debemos usar x negativa:

i) $x = -\,0{,}4\ m$

$$x'=\frac{x.f_o}{f_o-x}=\frac{(-0{,}4m).(-0{,}24m)}{(-0{,}24m)-(-0{,}4m)}=0{,}6\,m$$

$$A=\frac{y'}{y}=\frac{x'}{x}=\frac{0{,}6\,m}{-0{,}4\,m}=-1{,}5$$



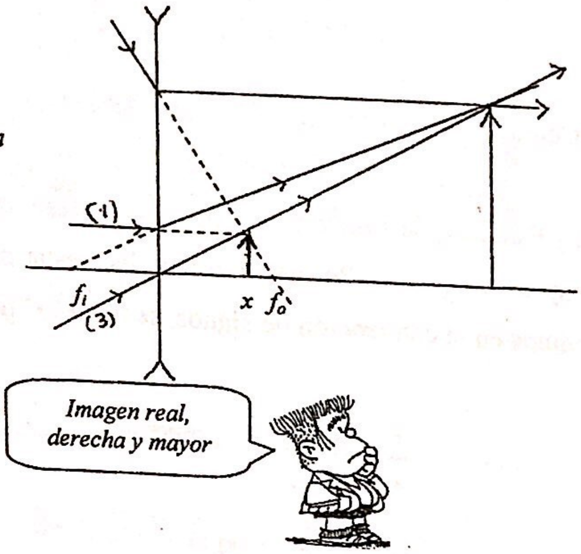
Scanned with CamScanner

Entonces, como x' dio positiva, significa que la imagen es *virtual*, como el aumento A es negativo la imagen es *invertida*, y como $|A|>1$ la imagen es de *mayor* tamaño. Para el trazado de rayos, te marco en el dibujo los tres rayos principales, numerados como dijimos en la página 3 y 4. El objeto virtual fue trazado en línea punteada del lado derecho de la lente, pero como siempre, los rayos inciden desde la izquierda.

ii) $x = -0{,}2\ m$

$$x' = \frac{x.f_o}{f_o - x} = \frac{(-0{,}2m).(-0{,}24m)}{(-0{,}24m)-(-0{,}2m)} = -1{,}2\,m$$

$$A = \frac{y'}{y} = \frac{x'}{x} = \frac{-1{,}2\,m}{-0{,}2\,m} = 6$$



Entonces, como x' dio negativa, significa que la imagen es *real*, como el aumento A es positivo la imagen es *derecha*, y como $|A|>1$ la imagen es de *mayor* tamaño. Para el trazado de rayos, te marco en el dibujo los tres rayos principales. El objeto virtual fue trazado en línea punteada del lado derecho de la lente, pero como siempre, los rayos inciden desde la izquierda.

18. Un objeto está colocado a 1,2 m de una lente. Determine la distancia focal y la naturaleza de la lente que produce una imagen (a) real y a 0,8 m ; (b) virtual y a 3,2 m; (c) virtual y a 0,6 m de la lente y (d) real y dos veces mayor.

$$\frac{1}{x'} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f}$$

a) como la imagen es real nuestro objeto está en una posición objeto x = -0,8 m (recordar la convención de signos de la cátedra). Entonces:

$$\boxed{\frac{1}{x}-\frac{1}{x'}=\frac{1}{f_o}} \xrightarrow{\textit{reemplazo}} \frac{1}{1{,}2m}-\frac{1}{-0{,}8m}=\frac{1}{f_o} \xrightarrow{\textit{cuentas}}$$

$$2{,}08\widehat{3}=\frac{1}{f_o} \rightarrow f_o=+0{,}48m$$

Como el foco objeto es positivo, la lente es ***convergente***.

b) Esta vez, la imagen es virtual, vale decir que debe formarse por prolongación de los rayos emergentes. Por este motivo, debe estar del lado izquierdo (como el objeto), y según vimos en la convención de signos, se tendrá x' positiva:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x'}=\frac{1}{f_o} \xrightarrow{\textit{reemplazo}} \frac{1}{1{,}2m}-\frac{1}{+3{,}2m}=\frac{1}{f_o} \xrightarrow{\textit{cuentas}}$$

$$0{,}5208\widehat{3}=\frac{1}{f_o} \rightarrow f_o=+1{,}92m$$

Como antes, el foco objeto es positivo y la lente es ***convergente***.

c) acá también la imagen es virtual, vale decir que se tendrá x' positiva:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x'}=\frac{1}{f_o} \xrightarrow{\textit{reemplazo}} \frac{1}{1{,}2m}-\frac{1}{+0{,}6m}=\frac{1}{f_o} \xrightarrow{\textit{cuentas}}$$

$$-0{,}8\widehat{3}=\frac{1}{f_o} \rightarrow f_o=-1{,}2m$$

Como antes, el foco objeto es negativo y la lente es ***divergente***.

d) en este caso debemos tener cuidado con el siguiente detalle: si la imagen es real entonces x' es negativa. Por lo tanto, de la expresión del agrandamiento:

$$A = \frac{x'}{x}$$

Debemos ver que la relación de tamaños debe ponerse como $A = \frac{x'}{x} = -2$, ya que la posición objeto e imagen tienen ***distinto signo***. Cuidado con esto: cuando dicen que es del doble de tamaño, nos dan el ***módulo*** del aumento, pero para el signo debemos saber si la imagen es invertida o derecha (cosa que no sabíamos), o si la imagen es real ($x' < 0$) o virtual ($x' > 0$). De esta relación despejamos: $x' = -2x = -2{,}4\,m$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x'} = \frac{1}{f_o} \xrightarrow{reemplazo} \frac{1}{1{,}2m} - \frac{1}{-2{,}4m} = \frac{1}{f_o} \xrightarrow{cuentas}$$

$$1{,}25 = \frac{1}{f_o} \quad \rightarrow \quad f_o = +0{,}8\,m$$

Y como el primer caso, el foco objeto es positivo y la lente es ***convergente***.

19. Una lente convergente tiene distancia focal de 0,6m. Calcule la posición del objeto en la que se produce una imagen (a) real y tres veces mayor; (b) real y de un tercio del objeto, (c) virtual y dos veces mayor.

Como advertimos en la parte (d) del problema anterior debemos tener cuidado con el tema del aumento: cuando nos dicen la relación de tamaño entre objeto e imagen, nos dan el módulo del aumento. Pero el signo es muy importante:

a) supongamos objeto real ($x > 0$), como la imagen es real debe ser $x' < 0$ (recordar la convención de signos). Entonces ambas variables deben tener signo distinto, es decir el aumento debe ser negativo:

$$A=\frac{y'}{y}=\frac{x'}{x}=-3 \quad\rightarrow\quad x'=-3.x$$

Reemplazo en la ecuación de Descartes:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x'}=\frac{1}{f_o}\xrightarrow{reemplazo}\frac{1}{x}-\frac{1}{-3.x}=\frac{1}{0,6\ m}\xrightarrow{cuentas}$$

$$\frac{3+1}{3.x}=\frac{1}{0,6\ m}\xrightarrow{despejo} x=+0,8\,m$$

Observación: suponiendo que el objeto es virtual, se debe plantear $x' = 3.x$, y así:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x'}=\frac{1}{f_o}\xrightarrow{reemplazo}\frac{1}{x}-\frac{1}{3.x}=\frac{1}{0,6\ m}\xrightarrow{cuentas}$$

$$\frac{3-1}{3.x}=\frac{1}{0,6\ m}\xrightarrow{despejo} x=+0,4\,m$$

Sin embargo, esta respuesta no sirve porque nos da $x > 0$ y $x' < 0$ (al revés de lo q necesitamos) Además, parece del enunciado que el objeto es algo concreto (y no la imag dada por otro sistema), por lo que para los siguientes sólo supondremos el caso de obj real.

b) Como en el anterior, la relación es esta vez:

$$A=\frac{y'}{y}=\frac{x'}{x}=-\frac{1}{3} \quad\rightarrow\quad x'=-\frac{1}{3}.x$$

Reemplazo en la ecuación de Descartes:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x'}=\frac{1}{f_o} \xrightarrow{reemplazo} \frac{1}{x}-\frac{1}{-\frac{1}{3}.x}=\frac{1}{0{,}6\ m} \xrightarrow{invierto} \frac{1}{x}+\frac{3}{x}=\frac{1}{0{,}6\ m}$$

$$\frac{4}{x}=\frac{1}{0{,}6\ m} \xrightarrow{despejo} x=+2{,}4\,m$$

c) Y esta vez, como la imagen debe ser virtual y el objeto real, tanto x como x' deben ser positivos, y el aumento debe tener signo positivo:

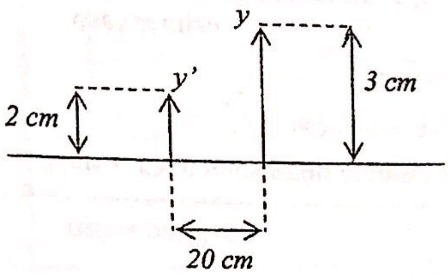
$$A=\frac{y'}{y}=\frac{x'}{x}=+2 \rightarrow x'=2.x$$

Reemplazo en la ecuación de Descartes:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x'}=\frac{1}{f_o} \xrightarrow{reemplazo} \frac{1}{x}-\frac{1}{2.x}=\frac{1}{0{,}6\ m} \xrightarrow{común\ divisor}$$

$$\frac{1}{2.x}=\frac{1}{0{,}6\ m} \xrightarrow{despejo} x=0{,}3\,m$$

20. a) Calcule analíticamente dónde está la lente y cuál es su distancia focal para el caso representado. El objeto es real.
(y = objeto; y' = imagen).
b) Realice el trazado de rayos.
c) Si la lente calculada en el punto anterior tiene sus dos caras construidas con el mismo radio de curvatura ¿podría ser biconvexa?



Hago una aclaración para que no haya malos entendidos: las dos flechas de los costados no representan lentes convergentes, apenas indican las alturas del objeto y de la imagen (o sea de las flechas y e y')

Tenemos los siguientes datos: $y = +3\ cm$, $y' = +2\ cm$, y la distancia entre el objeto y su imagen es 20 cm. ¿Cómo podemos escribir este dato? La distancia es el módulo de la resta de las posiciones (siempre, no importa si una es negativa, o ambas, o ninguna de las dos, siempre es el módulo de la resta de las posiciones). Por lo tanto tenemos que escribir:

$$|x' - x| = 20\ cm$$

Reemplazando en la expresión del aumento, nos queda un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$\begin{cases} A: \dfrac{y'}{y} = \dfrac{x'}{x} \rightarrow \dfrac{2}{3} = \dfrac{x'}{x} \rightarrow x' = \dfrac{2}{3}.x \\ |x' - x| = 20\ cm \xrightarrow{\text{Abro módulo}} x' - x = \pm 20\ cm \end{cases}$$

Al abrir el módulo nos quedaron dos posibilidades. No quiero complicarla desechando uno de los casos, porque me parece más fácil que las cuentas digan lo suyo. Así, primero estudio el caso en que para el módulo abro con el "+", y después lo hago con el "-":

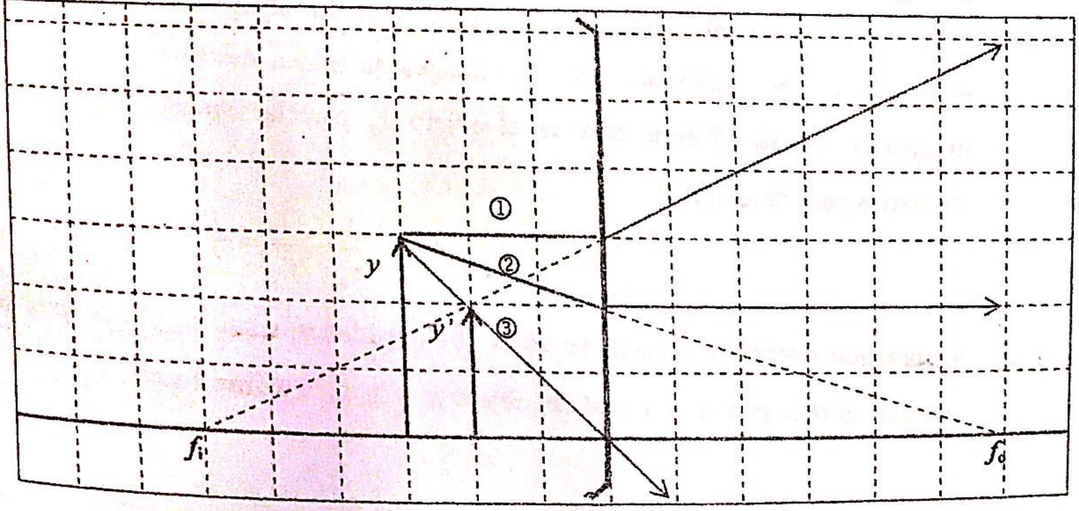
Primer caso
$\begin{cases} x' = \frac{2}{3}x \\ x' - x = +20\ cm \end{cases}$ Este sistema tiene solución $x = -60\ cm$, $x' = -40\ cm$
Segundo caso
$\begin{cases} x' = \frac{2}{3}x \\ x' - x = -20\ cm \end{cases}$ Este sistema tiene solución $x = +60\ cm$, $x' = +40\ cm$

La que no nos sirve es la del primer caso, porque por los signos representa un objeto virtual, y eso contradice lo que dice el enunciado. Reemplazo en la fórmula de Descartes:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x'}=\frac{1}{f_o} \rightarrow \overbrace{\frac{1}{60cm}-\frac{1}{40cm}}^{-\frac{1}{120cm}}=\frac{1}{f_o} \rightarrow f_o=-120\ cm$$

Como dio negativa, según la convención de signo la lente es divergente. Para terminar de contestar el punto a) nos queda ubicar bien la lente. Como la posición del objeto y de la imagen se miden desde la lente, debo decir que la lente se encuentra a 60 cm del objeto y a 40 cm de la imagen dejando a ambas del mismo lado (tienen el mismo signo). Miralo en el trazado de rayos

b) Para el trazado de rayos tomo una escala donde cada división marcada en el eje horizontal corresponde a 20 cm y marco los tres rayos principales, y los que emergen del otro lado de la lente. Los emergentes deben prolongarse hacia atrás para obtener una intersección, en ese punto es que se forma la imagen virtual dada por la lente divergente.
En el trazado de rayos también marqué la posición relativa de la lente. Para que no haya objeciones, quiero aclarar que en el mismo aparece el objeto a la izquierda de la imagen, aparentemente al revés que en la guía. Pero eso no indica ningún error: sencillamente cuando tenemos dos personas, una frente a otra, a la derecha de una es hacia la izquierda de la otra. Este mismo trazado de rayos que hago, si estuviera hecho en papel de calcar, bastaría mirarlo dando vuelta la hoja para que coincida con el esquema de la guía.



c) uso la fórmula del constructor de lentes para cuando el medio externo es el aire:

$$f_o = \frac{1}{n_v - 1} \cdot \left(\frac{R_1 . R_2}{R_1 - R_2} \right)$$

Una lente biconvexa tiene la forma  y si sus radios son "iguales" (no tanto, porque convención de signos me dice que son opuestos) se tiene $R_1 = -R_2$. Entonces:

$$f_o = \frac{1}{n_v - 1} \cdot \left(\frac{-(R_1)^2}{2.R_1} \right) = \frac{1}{n_v - 1} \cdot \left(\frac{-R_1}{2} \right) \rightarrow R_1 = -2.(n_v - 1).f_o$$

Como f_o es negativo, se tiene que R_1 debe ser positivo. Pero en nuestra convención signos, la lente biconvexa tiene la primera cara con radio R_1 negativo. Así que no puede biconvexa, debe ser bicóncava. Repasar los casos que vimos en el ejercicio 15.

21. Un sistema de lentes está compuesto por dos lentes convergentes en contacto entre con longitudes focales de 30 cm y 60 cm. (a) Calcule la posición de la imagen y el aumen de un objeto colocado a 0,2m del sistema. (b) Considere también un objeto virtual coloca a una distancia de 0,40m del sistema.

Cuando dos lentes son colocadas ***en contacto*** decimos que tenemos un sistema de len adosadas. En ese caso, el sistema de lentes se comporta como una única equivalente cu potencia (la inversa del foco) es la suma de las potencias, o lo que es lo mismo, cuyo fo viene dado por la relación de sumas de inversas. En efecto, si las lentes son delgadas están juntas, las posiciones objeto e imagen se miden desde el mismo O. Además, imagen x'_1 de la primera lente es el objeto x_2 para la segunda. Usando la fórmula Descartes para cada lente:

$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x'_1} = \frac{1}{f_1} \quad ; \quad \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x'_2} = \frac{1}{f_2}$$

Y sumando miembro a miembro estas dos igualdades, como $x_2 = x'_1$, se obtiene que relación entre la posición inicial del objeto x_1 y la de la última imagen x'_2 es:

$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x'_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

Esto es como decir que del lado derecho, la distancia focal que debemos poner está dada por la expresión:

$$\frac{1}{f_{equiv.}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

Para trabajar con esta relación siempre tener muy presente los signos de los focos según nuestra convención de signos (+ para las convergentes, - para las divergentes)

En nuestro caso, como ambas son convergentes, la equivalente resulta:

$$\frac{1}{f_{equiv}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{30\ cm} + \frac{1}{60\ cm} = \frac{1}{20\ cm} \xrightarrow{invierto} f_{equiv} = +20\ cm$$

Es decir, se comportan como una convergente de menor distancia focal. Si ahora ubicamos un objeto real en la posición $x = +20\ cm$ (es decir en el foco):

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x'} = \frac{1}{f_o} \xrightarrow{despejo} \frac{1}{x'} = \frac{f_o - x}{f_o . x} = \frac{20\ cm - 20\ cm}{(20\ cm).(20\ cm)} = 0$$

E invirtiendo, resulta que $x' = \infty$. Para este objeto no tiene sentido plantear el aumento.

b) Para un objeto virtual ubicado a 0,40 m del sistema de lentes, tendremos: x = -40 cm

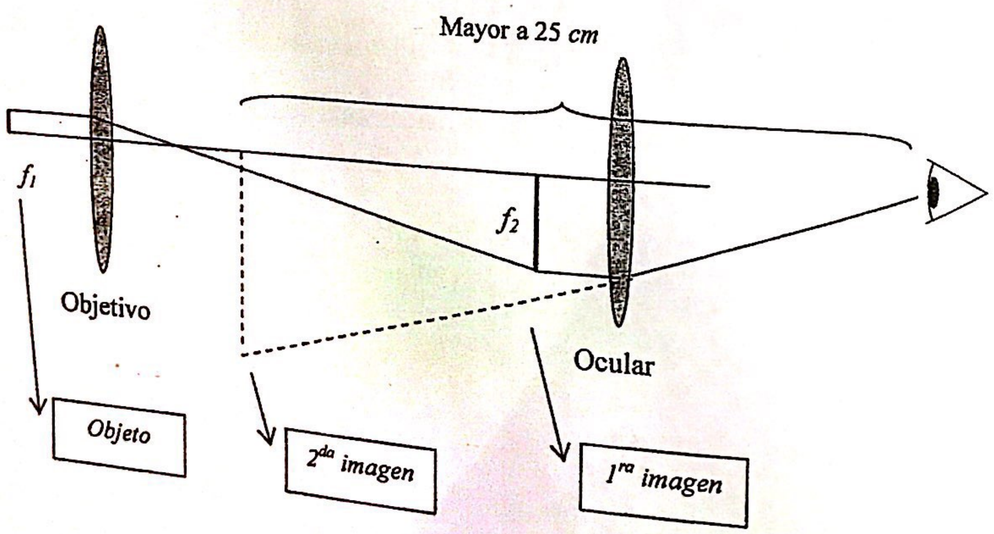
$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x'} = \frac{1}{f_o} \xrightarrow{despejo} \frac{1}{x'} = \frac{f_o - x}{f_o . x} = \frac{20\ cm - (-40\ cm)}{(20\ cm).(-40\,cm)} = -0{,}075 \rightarrow x' = -13{,}\overline{3}\ cm$$

Y con la expresión del aumento:
$$A = \frac{y'}{y} = \frac{x'}{x} = \frac{-13{,}\overline{3}\ cm}{-40\ cm} = 0{,}\overline{3}$$

22. ¿Qué quiere decir el término enfoque de un instrumento óptico? Analice la forma en que se efectúa el enfoque en (a) un microscopio, (b) un telescopio, (c) Un proyector de diapositivas y (d) una cámara fotográfica o de vídeo.

En todos los instrumentos ópticos existe la posibilidad de cambiar la posición relativa del objeto respecto a las lentes o espejos que lo conforman, para lograr una imagen con cierta característica. Veamos cada caso:

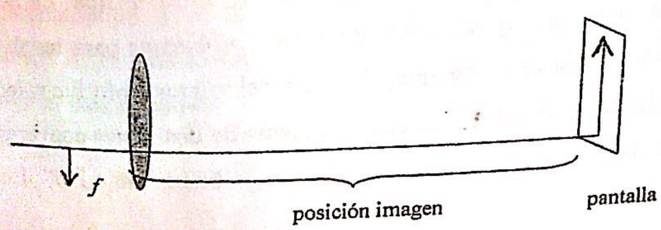
a) Microscopio: consta de dos lentes convergentes, la primera se llama objetivo y la segunda ocular. El objeto se ubica próximo al f_o del objetivo (f_1), y apenas a mayor distancia, de manera tal que se produce una primera imagen que es real, invertida y mayor. Esta imagen es el objeto de la 2^{da} lente (el ocular) que se encuentra ubicada respecto al objetivo de manera fija y tal que la 1^{ra} imagen se forma cerca de su foco objeto, pero a una distancia ligeramente menor. Como vimos en las conclusiones de la página 11, la imagen formada por esta 2^{da} lente será virtual, derecha y mayor. El resultado final es que ambas lentes aumentan el tamaño del objeto, y que la imagen final está ubicada a una distancia de más de 25 *cm* a la izquierda del ocular (de manera tal que se asegure que el ojo de la persona pueda verla, ya que esta distancia es la mínima que exige el ojo para poder enfocar).



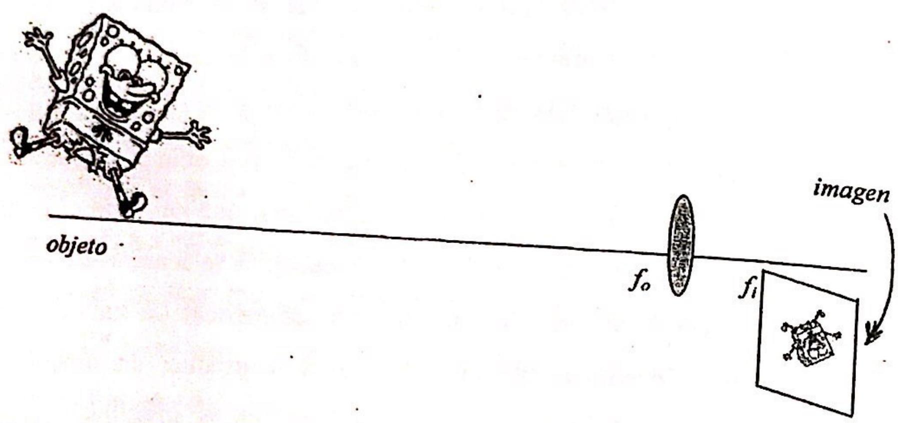
Como la primera lente invirtió la imagen, y la 2da no, el resultado final es una imagen invertida respecto del objeto original. El enfoque consiste en estos instrumentos, en mover el sistema de lentes al mismo tiempo (la distancia entre ellas permanece fija) hasta que el objeto quede ubicado en la posición correcta: un poco antes del foco f_1

b) El telescopio también es un sistema compuesto. Los más sencillos son los formados por dos lentes convergentes (también llamadas objetivo y ocular), con un esquema similar al del microscopio. Pero como aquí se supone que se lo utilizará para lograr observar objetos en el infinito, la primera imagen se forma en el foco imagen de la 1er lente. La idea es que entonces el foco objeto f_2 del ocular se encuentre un poco antes de este punto, de forma tal que la 1er imagen se forma entre la 2da lente y su foco. Como vimos en las conclusiones de la página 11, se tendrá entonces que la imagen final que nos dará el ocular será entonces virtual, derecha y mayor. La mayoría de los telescopios se construyen con espejos esféricos, los cuales nos permiten evitar las aberraciones cromáticas (la luz de distinto color forma imagen del mismo objeto en distintos lugares y se produce una distorsión en la forma). También son más sencillos de armar (las lentes pueden ser sostenidas sólo de sus extremos, y eso las convierte en sistemas más delicados).

c) Un proyector de diapositivas consiste en una lente convergente: el objeto se ubica un poco antes del foco, de forma tal que la imagen es mayor, real e invertida. Por lo tanto, se la puede poner en una pantalla. Para que la imagen se vea correcta, la diapositiva se ingresa cabeza abajo en el proyector (la imagen invertida queda cabeza arriba). El enfoque consiste en acercar o alejar el objeto (la diapositiva) a la lente, hasta que la posición de la imagen coincida con la de la pantalla; la distancia imagen (lente-pantalla) está fija a menos que movamos de lugar la pantalla o el proyector.



d) la cámara fotográfica también es una lente convergente de corta distancia focal, que trabaja como el proyector del caso anterior, pero de forma inversa: la pantalla sobre la que se forma la imagen es el film fotográfico donde se imprime el negativo. En esa pantalla se forma una imagen mucho menor que el objeto original. El objeto está entonces lejos del foco, y el film donde se imprime está casi sobre el foco imagen, como se muestra en el dibujo.

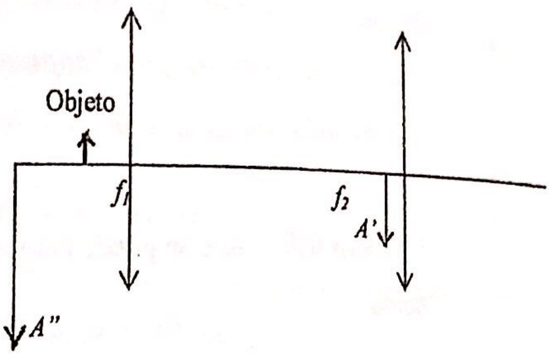


El enfoque consiste en mover la posición de la lente respecto del film, hasta lograr que la posición imagen x' quede sobre la película.

23. El objetivo de un microscopio tiene una distancia focal de 4 *mm*. La imagen formada por éste está a 180 *mm* de su segundo punto focal. El ocular tiene una distancia focal de 31,25 *mm*. (a) Calcule el aumento del microscopio. (b) El ojo humano puede distinguir la diferencia entre dos puntos si éstos se hallan separados aproximadamente 0,1 *mm*. ¿Cuál es la separación mínima que se puede percibir con la ayuda de este microscopio?

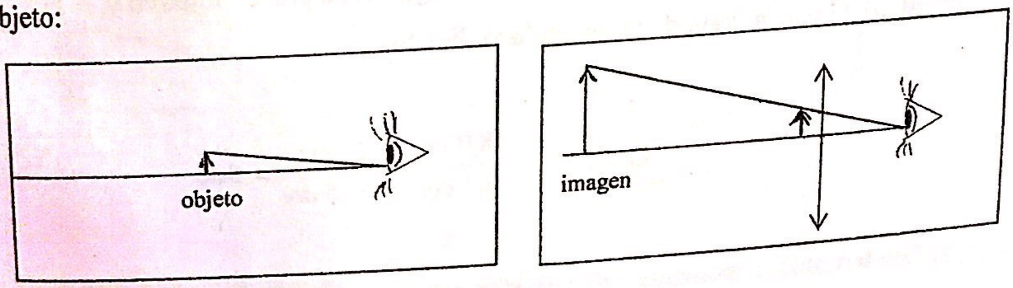
La teoría para resolver este ejercicio fue sacada del libro "Física" de Sears-Zemansky (que por otra parte, tiene este ejercicio en la parte de problemas para resolver, es decir que los docentes también lo sacaron de aquí). El tema del microscopio fue relatado brevemente en el problema 22. Básicamente, tenemos un sistema de dos lentes convergentes: la que forma la primera imagen y que va contra el objeto se la llama "objetivo". La que da la imagen definitiva, y queda contra nuestro ojo se la llama "ocular". La función del objetivo es brindar una imagen aumentada del objeto, que sirve como objeto del ocular.

Básicamente, la situación es la del dibujo: el objetivo da una primera imagen A' del objeto, la cual es aumentada e invertida.



Además, esta imagen se forma entre el ocular y su foco, por lo tanto esta 2da lente nos da una 2da imagen (la definitiva) que es derecha (respecto de su objeto A') y virtual, que en el dibujo llamamos A''.

El ocular sirve como lupa: tiene un objeto entre su foco y la lente, da entonces una imagen virtual y agrandada. Para las lupas se define el aumento angular como el cociente entre el ángulo que forman los rayos con el eje para la imagen, y los que forman los rayos del objeto:



Es importante saber que este aumento no es lo mismo que el aumento lateral, el cual depende de la ubicación del objeto. Para que este valor sea estándar y se pueda indicar como una característica de la lupa, se lo define ubicando el objeto a 25 cm del ojo (o sea en el punto próximo, el más cercano al ojo en el cual podemos enfocar). En ese caso el aumento angular está dado por:

$$A_{(ang)} = \frac{25\ cm}{f}$$

Este aumento no tiene unidades, aunque es común verlo con una X detrás (se lee "por"). Entonces, el aumento del microscopio se define como ***el aumento lateral que nos da el objetivo, multiplicado por el angular que nos da el ocular***. Esta es una definición que sirve para estandarizar los instrumentos (es decir, permite comparar un microscopio con otro).

Para esta definición, se puede demostrar que el aumento lateral del objetivo se puede sacar como:

$$A_{(obj)} = -\frac{d}{f_1}$$

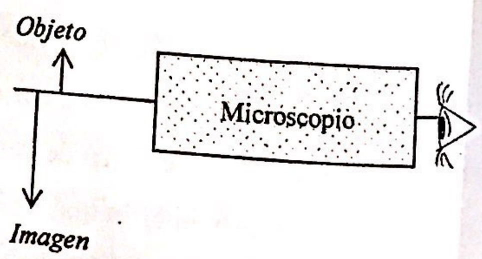
Donde d es la distancia entre el punto donde se forma la imagen y el foco imagen del objetivo (no es ni la posición objeto, ni la imagen). La fórmula del aumento para el microscopio es entonces el producto:

$$A_{microsc.} = A_{(obj)} \cdot A_{(ang,ocular)} = -\frac{d}{f_1} \cdot \frac{25\ cm}{f_2}$$

Los datos del problema son las dos distancias focales, y la distancia $d = 180\ mm$ (que como dice el enunciado es la distancia entre la imagen dada por el objetivo y el foco imagen del objetivo). O sea, se trata de un reemplazo directo:

$$A_{microsc.} = -\frac{18{,}0\ cm}{0{,}4\ cm} \cdot \frac{25\ cm}{3{,}125\ cm} = 360$$

b) Para terminar, supongamos dos objetos que se encuentran muy cercanos, o los extremos de un único objeto de altura y. Para este objeto, podemos usar la fórmula del aumento, que ya calculamos, pidiendo que la separación de los extremos de la imagen (que es lo que ve el ojo) sea 0,1 mm.



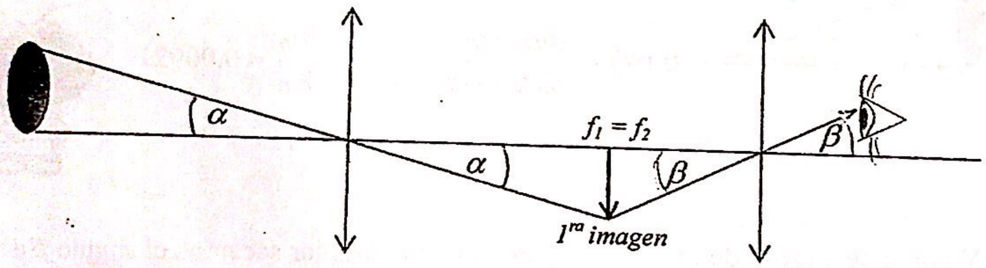
Es decir, debemos pedir que la imagen sea distinguible por el ojo (que tenga un tamaño que pueda verla), y de ahí despejar el tamaño del objeto original:

$$A_{microsc.} = \frac{y'}{y} \xrightarrow{reemplazo} 360 = \frac{0{,}1\ mm}{y} \xrightarrow{despejo} y = \frac{0{,}1\ mm}{360} \cong 2{,}\bar{7}\ .10^{-4}\ mm$$

Es decir, aproximadamente $3.10^{-7}\ m$ (son unos 300 nanómetros, o 0,3 micrómetros)

24. El diámetro de la Luna es de $3{,}5.10^{3}\ km$ y su distancia a la Tierra es $3{,}8\ .10^{5}\ km$. Encuentre el diámetro angular de la imagen de la Luna formada por un telescopio, si la distancia focal del objetivo es de 4 m y la del ocular es de 10 cm.

En el caso del telescopio, hicimos una breve descripción del instrumento en el problema 22. Se trata de dos lentes convergentes, llamadas como en el microscopio objetivo y ocular. Como se quiere observar objetos muy lejanos se supone que $x = \infty$ en la primera incidencia. Por lo tanto, la imagen se forma en el foco imagen de la lente objetivo. En ese mismo punto se ubica aproximadamente el foco objeto del ocular, por lo tanto la imagen final se encuentra en infinito (ver dibujo).



Se define el aumento angular de un telescopio como el cociente del ángulo de incidencia de la imagen con el telescopio (β) y sin el telescopio (α), como se mostró anteriormente para el microscopio. Como estos ángulos son pequeños, en muchos textos se los aproxima por su tangente:

$$A_{(ang)} = \frac{\beta}{\alpha} \cong \frac{tg(\beta)}{tg(\alpha)}$$

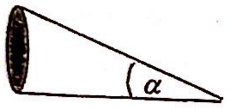
La relación entre los cocientes de estas tangentes se puede sacar del dibujo de arriba. En efecto, para ambos ángulos, la altura de la 1^{ra} imagen es el cateto opuesto, mientras que sus catetos adyacentes son las distancias focales. Por lo tanto:

$$A_{(ang)} = \frac{tg(\beta)}{tg(\alpha)} = \frac{\frac{y_1}{f_2}}{\frac{y_1}{f_1}} = \frac{f_1}{f_2}$$

Así, el aumento angular del telescopio es el cociente de las distancias focales de las lentes objetivo sobre la ocular. Para nuestro telescopio, ese valor es

$$A_{(ang)} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{400\ cm}{10\ cm} = 40$$

Para terminar con el ejercicio debemos calcular el diámetro angular de la imagen de la Luna, es decir el ángulo β que nos da la imagen del telescopio. Calculamos entonces primero el α de incidencia, a partir de los datos de su diámetro y distancia:



$$tg(\alpha) = \frac{diámetro}{distancia} = \frac{3{,}5.10^3\ km}{3{,}8.10^5\ km} = 0.00921$$

Y con este ángulo de incidencia y el aumento angular sacamos el ángulo β de la imagen:

$$A_{(ang)} = \frac{\beta}{\alpha} \xrightarrow{reemplazo} 40 = \frac{\beta}{0{,}00921} \rightarrow \beta = 0{,}368$$

Este valor es en radianes (lo mismo que α). En grados son $\alpha \approx 0{,}5°$ y $\beta \approx 21°$